

Лекция 8

n m

$$\Pi w \rightarrow \max$$

$$G\vec{x} \geq A\vec{x} + w\vec{K} \quad \{ \beta \geq 0$$

$$\vec{c}\vec{x} \leq R \quad \{ s \geq 0 \quad (1)$$

$$\vec{b}\vec{x} \leq \Phi \quad \{ \gamma \geq 0$$

$$\vec{x} \geq 0, w \geq 0$$

$$(\vec{g}_n, \vec{a}_n, c_n, b_n)$$

$$\Pi w \rightarrow \max$$

$$L\vec{x} + x_n \cdot \vec{g}_n \geq A\vec{x} + x_n \vec{a}_n + w\vec{K}$$

$$\vec{c}\vec{x} + c_n x_n \leq R$$

$$\vec{b}\vec{x} + b_n x_n \leq \Phi$$

$$\vec{x} \geq 0, x_n \geq 0, w \geq 0$$

(2)

Опр Будем говорить, что новая технология $(\vec{g}_n, \vec{a}_n, c_n, b_n)$ яв-я неэф-н, если оптимальные значения функции-ц в ЗЛП (1) и (2) равны:

$$L(\vec{x}, w, \vec{p}, s, \gamma) = R w + (\vec{p}, L\vec{x} - A\vec{x} - w\vec{K}) + s(R - \vec{c}\vec{x}) + \gamma(\Phi - \vec{b}\vec{x}) = sR + \gamma\Phi + (\vec{x}, L^*\vec{p} - A^*\vec{p} - s\vec{c} - \gamma\vec{b}) + w(\Pi - \vec{p}\vec{K})$$

$$sR + \gamma\Phi \rightarrow \min$$

$$L^*\vec{p} \leq A^*\vec{p} + s\vec{c} + \gamma\vec{b}$$

$$\vec{p}\vec{K} \geq \Pi$$

$$\vec{p} \geq 0, s \geq 0, \gamma \geq 0$$

(3)

Предложение 2

Для того, чтобы новая технология $(\vec{g}_n, \vec{a}_n, c_n, b_n)$ была неэффективна необходимо и достаточно, чтобы $\exists$ решение дв. з-и ЛП(3) $(\vec{p}, s, \tau)$ такое, что

$$\vec{p} \cdot \vec{g}_n \leq \vec{p} \cdot \vec{a}_n + s c_n + \tau b_n \quad (4)$$

издержек из-за
исп-я новых техн-й

Двойственная ЗЛП к ЗЛП(2):

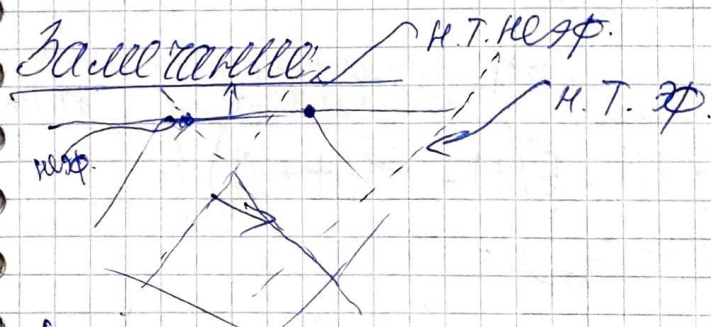
$$\begin{cases} sR + \tau\Phi \rightarrow \min \\ \Delta^* \vec{p} \leq A^* \vec{p} + s\vec{c} + \tau\vec{b} \\ \vec{g}_n \vec{p} \leq \vec{a}_n \vec{p} + s\vec{c}_n + \tau b_n \\ p \geq 0, s \geq 0, \tau \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

По т-е двойств-и опт-е зм-е функционала в ЗЛП(1) = ОЗ Функции ЗЛП(3).

$$ОЗФ \stackrel{\text{def}}{=} ЗЛП(2) = ОЗФ ЗЛП(5)$$

Д-и $\Leftrightarrow$ в задаче (5) лев-во стр-й уже, чем в з. (3)

$$\Rightarrow \exists \text{ нов. техн-я неэф-я} \Rightarrow ОЗФ ЗЛП(1) = \dots (2) = \dots ОЗФ ЗЛП(3) = \dots (5)$$



§5. Экономическая интерпретация принципа максимума в моделях экстенсивного экономического роста.

$t=0 \dots T$
 $\vec{z}(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t)) \geq 0$ - вектор производственных мощностей в период времени t

$\vec{x}(t)$ - вектор объемов производства в период времени t ,
 $\vec{x}(t) \in \vec{\xi}(t)$

$$\vec{\xi}(t+1) = \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t)$$

$\vec{\theta}(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)) \geq 0$ - вектор прироста мощностей в период времени t

$B\vec{\theta}(t)$ - затраты на строительство новых мощностей в период времени t

B - матрица приростов трудоемкости ^(m x n)

$$\sum_{t=0}^{T-1} \pi(t) w(t) \rightarrow \max$$

$$\vec{x}(t) \geq A\vec{x}(t) + B\vec{\theta}(t) + w(t)\vec{K} \quad \vec{p}(t)$$

$A \geq 0$ - непродуктивная м-ца

$$\vec{c}\vec{x}(t) \leq R(t) \quad s(t) \geq 0 \quad t = 0, T-1$$

$$\vec{x}(t) \in \vec{\xi}(t) \quad \vec{\xi}(t) \geq 0 \quad (I)$$

$$\vec{\xi}(t+1) = \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t) \quad \vec{\mu}(t)$$

$$\vec{\xi}(0) = \vec{\xi}_0 > 0 \quad \vec{\mu}_0$$

$$\pi(t) = \delta^t \quad 0 < \delta < 1$$

$$\vec{\xi}(t) \geq \vec{\xi}_0 > 0 \quad \vec{\mu}_T \geq 0$$

$$w(t) \geq 0, \theta(t) \geq 0$$

$$L(\{\vec{x}(t), w(t), \vec{\theta}(t), \vec{\xi}(t) | t=0, T-1\}, \vec{\xi}(T), \{\vec{p}(t), s(t), \vec{c}(t), \vec{x}(t) | t=0, T-1\}, \vec{\mu}_0, \vec{\mu}_T) = \sum_{t=0}^{T-1} \{ \pi(t) w(t) +$$

$$+ (\vec{p}(t), \vec{x}(t) - A\vec{x}(t) - B\vec{\theta}(t) - w(t)\vec{K}) + s(t)(R(t) - \vec{c}\vec{x}(t)) +$$

$$+ (\vec{c}(t), \vec{\xi}(t) - \vec{x}(t)) + (\vec{\mu}(t), \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t) - \vec{\xi}(t+1)) \}$$

$$+ (\vec{\mu}_0, \vec{\xi}_0 - \vec{\xi}(0)) + (\vec{\mu}_T, \vec{\xi}(T) - \vec{\xi}_T) =$$

$$= \vec{\mu}_0 \vec{\xi}_0 - \vec{\mu}_T \vec{\xi}_T + \sum_{t=0}^{T-1} s(t) R(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \{ (\vec{x}(t), \vec{p}(t) -$$

$$- A^* \vec{p}(t) - s(t) \vec{c} - \vec{c}(t)) + w(t)(\pi(t) - \vec{p}(t) \cdot \vec{K}) +$$

$$+ (\vec{\theta}(t), \vec{\mu}(t) - B^* \vec{p}(t)) + \sum_{t=0}^{T-1} (\vec{\xi}(t), \vec{\mu}(t) + \vec{c}(t) - \vec{\mu}(t+1)) \}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial t} (p_1, \vec{u}(t) + \vec{v}(t) - \vec{u}_0) + \left(\frac{\partial}{\partial t} (T), -\vec{u}(T-1) + \vec{u}_T \right) \right)$$

$$\left(\vec{u}_0, \vec{u}_0 - \vec{u}_T + \sum_{t=0}^{T-1} s(t) \vec{v}(t) \right) \rightarrow \min$$

$$\vec{p}(t) = A^* \vec{p}(t) + s(t) \vec{v} + \vec{v}(t) \quad t=0, T-1$$

$$\vec{p}(t) \cdot \kappa \geq \pi(t) \quad t=0, T-1$$

$$B^* \vec{p}(t) \geq \vec{u}(t) \quad t=0, T-1$$

$$\vec{u}(t-1) = \vec{u}(t) + \vec{v}(t) \quad t=1, T-1 \quad (II)$$

$$\vec{u}_0 = \vec{u}(0) + \vec{v}(0)$$

$$\vec{u}(T-1) = \vec{u}_T$$

$$\vec{p}(t) \geq 0, s(t) \geq 0, \vec{v}(t) \geq 0, \vec{u}_T \geq 0$$

Основное правила постро-я дв.з.-и в рез-е прохо-я ф-и лагранжа прямой задачи:

- 1) слабые в к-х не входят пер-е прямой з.-и, образуют ф-л дв.з.-и;
- 2) слабые, уязвимые на 1 и ту же пер-е прямой з.-и образ-то ф-л дв.з.-и;
- 3) пер-е прямой з.-и на к-х не наложены оур-я, соотв-т тип раб-ва в Д.З.;
- 4) пер-и П.З. на знак к-х наложены оур-я неотриц-и, соотв-т тип раб-ва в Д.З., причем знак его выбирается т.о. чтобы при нарушении пер-ва, соотв-е слабые штрафовало ф-л в ф-и лагранжа Д.З.;
- 5) оур-и типа пер-ва в П.З. соотв-т неотриц. пер-е в Д.З.;
- 6) оур-и типа раб-ва в П.З. соотв-т пер-е произвольного знака в Д.З..

$$\sum_{t=0}^{T-1} \Pi(t) w(t) \rightarrow \max$$

$$\vec{x}(t) \geq A \cdot \vec{x}(t) + w(t) \cdot \vec{K} + B \cdot \vec{\theta}(t) \quad t = \overline{0, T-1} \quad \{ \vec{p}(t) \geq 0$$

$$\vec{C} \vec{x}(t) \leq R(t) \quad \{ s(t) \geq 0$$

$$\vec{x}(t) \leq \vec{z}(t) \quad \{ \vec{u}(t) \geq 0$$

(1)

$$\vec{z}(t+1) = \vec{z}(t) + \vec{\theta}(t) \quad \{ \vec{u}(t+1)$$

$$\vec{z}(0) = \vec{z}_0 \quad \{ \vec{u}(0)$$

$$\vec{z}(T) \geq \vec{z}_T \quad \{ \vec{u}_T \geq 0$$

$$w(t) \geq 0, \theta(t) \geq 0$$

$$\vec{u}(0) \vec{z}_0 - \vec{u}_T \vec{z}_T + \sum_{t=0}^{T-1} s(t) R(t) \rightarrow \min$$

$$\vec{p}(t) = A^* \vec{p}(t) + s(t) \cdot \vec{C} + \vec{v}(t) \quad \{ t = \overline{0, T-1}$$

$$\vec{p}(t) \cdot \vec{K} \geq \Pi(t)$$

$$B^* \vec{p}(t) \geq \vec{u}(t+1)$$

(2)

$$\vec{u}(t+1) = \vec{u}(t) + \vec{v}(t)$$

$$\vec{u}(T) = \vec{u}_T$$

$$\vec{p}(t) \geq 0, s(t) \geq 0, \vec{v}(t) \geq 0, \vec{u}_T \geq 0$$

Усл-я gon-й мем-и:

$$(\vec{p}(t), \vec{x}(t) - A \vec{x}(t) - B \vec{\theta}(t) - w(t) \cdot \vec{K}) = 0 \quad t = \overline{0, T-1} \quad (3_t)$$

$$s(t) (R(t) - \vec{C} \vec{x}(t)) = 0 \quad (4_t)$$

$$(\vec{v}(t), \vec{z}(t) - \vec{x}(t)) = 0 \quad (5_t)$$

$$(\vec{u}_T, \vec{z}(T) - \vec{z}_T) = 0 \quad (6)$$

$$w(t) \cdot (\Pi(t) - \vec{p}(t) \cdot \vec{K}) = 0 \quad (7_t)$$

$$(\vec{\theta}(t), \vec{u}(t+1) - B^* \vec{p}(t)) = 0 \quad (8_t)$$

Предположение 4.
 $\{ \vec{x}(t), w(t), \vec{\theta}(t), \vec{z}(t) | t = \overline{0, T-1}, \vec{z}(T) \}$ явл-я р-м
 $3 \wedge \Pi(1)$, а $\{ \vec{p}(t), \vec{v}(t), s(t), \vec{u}(t) | t = \overline{0, T-1}, \vec{u}(T) \}$,
 $\vec{u}_T$ явл-я р-м $3 \wedge \Pi(2)$, $0 \leq t \leq T-1$. Тогда

$\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\theta}(t)$ аб-я решением ЗЛП:

$$\pi(t)w(t) + (\vec{\mu}(t+1), \vec{\theta}(t)) \rightarrow \max$$

$$\vec{x}(t) \geq A\vec{x}(t) + B \cdot \vec{\theta}(t) + w(t)\vec{c} \quad \vec{p}(t) \geq 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{x}(t) \leq R(t) \quad s(t) \geq 0$$

$$\vec{x}(t) \leq \vec{z}(t) \quad \vec{v}(t) \geq 0$$

$$w(t) \geq 0, \vec{x}(t) \geq 0, \vec{\theta}(t) \geq 0$$

(9)

а. $(\vec{p}(t), \vec{s}(t), \vec{v}(t))$ аб-я решением ЗЛП: $\#3$.

$$\vec{p}(t) = A^* \vec{p}(t) + s(t) \cdot \vec{c} + \vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t) \cdot \vec{c} \geq \pi(t)$$

(10)

$$B^* \vec{p}(t) \geq \vec{\mu}(t+1)$$

$$\vec{p}(t) \geq 0, s(t) \geq 0, \vec{v}(t) \geq 0$$

$$L(\vec{x}(t), w(t), \vec{\theta}(t), \vec{p}(t), \vec{s}(t), \vec{v}(t)) =$$

$$= \pi(t)w(t) + (\vec{\mu}(t+1), \vec{\theta}(t)) + (\vec{p}(t), \vec{x}(t) -$$

$$- A\vec{x}(t) - B \cdot \vec{\theta}(t) - w(t)\vec{c}) + s(t)(R(t) - \vec{c} \cdot \vec{x}(t)) +$$

$$+ (\vec{v}(t), \vec{z}(t) - \vec{x}(t)) = s(t)R(t) + w(t)\vec{c} \cdot \vec{x}(t) +$$

$$+ (\vec{x}(t), \vec{p}(t) - A^* \vec{p}(t) - s(t)\vec{c} - \vec{v}(t)) +$$

$$+ w(t)(\vec{p}(t) \cdot \vec{c} - \pi(t)) + (\vec{\theta}(t), \vec{\mu}(t+1) - B^* \vec{p}(t))$$

Уч-я гон-й мем-н: $(\beta_t) - (\delta_t)$

$$\pi(t)w(t) + (\vec{\mu}(t+1), \vec{\theta}(t)) \frac{(\beta_t)}{(\delta_t)} w(t) \cdot \vec{p}(t) \cdot \vec{c} + \frac{(\beta_t)}{(\delta_t)} (\vec{\theta}(t), B^* \vec{p}(t))$$

ЗЛ. Теорема о максимуме.

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\| - \text{квазиметрика}$$

Свойства $\rho(\vec{x}, \vec{y})$:

$$1. \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$$

$$2. \rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$$

$$3. \rho(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0, \rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda > 0: \vec{y} = \lambda \vec{x}$$

$$4. \forall \lambda > 0, \mu > 0 \quad \rho(\lambda \vec{x}, \mu \vec{y}) = \rho(\vec{x}, \vec{y})$$

$$5. \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}, \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = \vec{y}, \vec{x} \neq 0, \vec{y} \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\vec{x}(t), \vec{y}(t)) = \rho(\vec{x}, \vec{y})$$

$$6. \exists \vec{x} \neq 0, \Gamma_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{x} / \rho(\vec{x}, \vec{x}) < \varepsilon\}$$

Если $\varepsilon \gg 0 < \varepsilon < \sqrt{2}$, то $\Gamma_\varepsilon(\vec{x})$ - конус

$$\vec{x} \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x}), \vec{y} \in \Gamma_\varepsilon(\vec{y}), \vec{x} + \vec{y} \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x})$$

$$\exists \exists \vec{x}, \vec{x} : \text{Diagram showing a vector } \vec{x} \text{ and a cone } \Gamma_\varepsilon(\vec{x})$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = \sin \frac{\delta}{2}$$

$$\frac{(\vec{x}, \vec{x})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{x}\|} = \cos \delta \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\rho(\vec{x}, \vec{x}) < \varepsilon \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{x}) > (1 - \frac{\varepsilon^2}{2}) \|\vec{x}\| \|\vec{x}\|$$

$$\vec{x} \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{x}) \geq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{x}\| (1 - \frac{\varepsilon^2}{2})$$

$$\vec{y} \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x}) \Leftrightarrow (\vec{y}, \vec{x}) \geq \|\vec{y}\| \cdot \|\vec{x}\| (1 - \frac{\varepsilon^2}{2}) \oplus \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) > (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|) (1 - \frac{\varepsilon^2}{2}) \geq \|\vec{x} + \vec{y}\| \cdot \|\vec{x}\|$$

$$\cdot (1 - \frac{\varepsilon^2}{2}) \Leftrightarrow \rho(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x}) < \varepsilon \Leftrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x})$$

1. A - max. затрат

$$\begin{cases} A \vec{x}(t+1) \leq \vec{x}(t) & t=0, T-1 \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \\ \vec{x}(t) \geq 0 & t=1, T-1 \end{cases}$$

(1)

$$\vec{c} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$$

Дир. (Самплекс, Дорфмане, Колмоу)

Будем говорить, что $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ яв-я

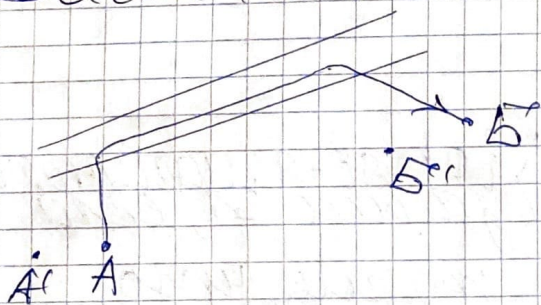
масштабирование для системы уравнений

$\Rightarrow$ экстремальных задач (1) ($\vec{c} \in \mathbb{R}_+^n$)

$\vec{x}_0 \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \vec{z}_1(\varepsilon) > 0, \vec{z}_2(\varepsilon) > 0$

такие, что решения $\{\vec{x}(t) | t \in [1, T]\}$
 $\exists \Pi$ (и удовл-т при $\tau_2(\varepsilon) \leq t \leq T$ $\tau_2(\varepsilon)$
 мер-ву:
 $\rho(\vec{x}(t), \vec{x}) < \varepsilon$

Замечание.



Теорема Морисона

$\exists A$ устойчивая м-ца, $\vec{x}_*$ - в-р Φ -П.А. (т.е.
 $A \vec{x}_* = \lambda(A) \cdot \vec{x}_*, \lambda(A) > 0$). Тогда $\vec{x}_*$ яв-я матрицую
 для семейства $\exists \Pi(1)$, где $\vec{c} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$,
 $\vec{x}_0 \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$

Теорема об уст-х матрицах

$\exists A \geq 0$ устойчивая м-ца, $\vec{x}_*$ - в-р Φ -П.А.
 Тогда $\forall \varepsilon > 0 \forall \vec{y}(0) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\} \exists \tau(\varepsilon, \vec{y}(0)) > 0$:
 при $t \geq \tau(\varepsilon, \vec{y}(0))$ справедливо:
 $\rho(A^t \vec{y}(0), \vec{x}_*) < \varepsilon$

P.S. $\vec{y}(t+1) = A \vec{y}(t) \Rightarrow \vec{y}(t+1) = A^t \vec{y}(0)$

Лекция 11.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\|$$

$$(\vec{x}(t)) \rightarrow \max$$

$$A\vec{x}(t+1) \leq \vec{x}(t) \quad \forall A \geq 0, t = 0, T-1$$

(1)

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

$$\vec{x}(t) \geq 0 \quad t = 1, T$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}, \vec{x}_0 \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$$

Опр. Будем говорить, что $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ яв-я мажорантой для семейства задач оптимизации (1), если

сильная мажор.
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_1(\varepsilon, A) > 0, \tau_2(\varepsilon, A) > 0$ такие, что

решение $\{\vec{x}(t) | t = 1, T\} \exists \cap \Pi(1)$ удовл-т при

$\tau_1(\varepsilon, A) \leq t \leq T - \tau_2(\varepsilon, A)$ мер-ву:

$$\rho(\vec{x}(t), \vec{x}) < \varepsilon$$

Теорема (Моркшица) (сильная мажоранта)

$\exists A \geq 0$ устойчивая м-ца и $\vec{x}_* = 0$ в-р Ф.-П. $A\vec{x}_* = A\vec{x}_*$

Тогда $\vec{x}_*$ яв-я мажорантой для семейства

$\exists \cap \Pi(1)$.

~~★~~

Теорема об уст. матр.

$\exists A \geq 0$ устойч. м-ца, $\vec{x}_*$ - вектор Ф.-П. A .

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \forall \vec{y}(0) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\} \exists \tau(\varepsilon, A, \vec{y}(0))$:

при $t \geq \tau(\varepsilon, A, \vec{y}(0))$:

$$\rho(A^t \cdot \vec{y}(0), \vec{x}_*) < \varepsilon$$

Лемма 1.

$\exists A \geq 0$ - устойчивая м-ца, $\vec{x}_*$ - вектор Ф.-П. A .

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau(\varepsilon, A) > 0$: $\forall \vec{y}(0) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}, t \geq \tau(\varepsilon, A)$

справедливо:

$$\rho(A^+ \vec{y}(0), \vec{x}_A) < \varepsilon$$

Разн-е $\vec{y}(0)$ по станд-му базису:

$$\vec{y}(0) = \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

$$y_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}$$

$$A^+ \vec{y}(0) = \sum_{j=1}^n y_j A^+ \vec{e}_j$$

$\exists \gamma(\varepsilon, A, \vec{e}_j) > 0$ (но т. оо уст-е матр.):

$$t \geq \gamma(\varepsilon, A, \vec{e}_j): \rho(A^+ \vec{e}_j, \vec{x}_A) < \varepsilon$$

$$\gamma(\varepsilon, A) = \max_{1 \leq j \leq n} \gamma(\varepsilon, A, \vec{e}_j)$$

$$\forall t \geq \gamma(\varepsilon, A) \quad \rho(A^+ \vec{e}_j, \vec{x}_A) < \varepsilon \quad j = \overline{1, n}$$

$$\Gamma_\varepsilon(\vec{x}_A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \rho(\vec{x}, \vec{x}_A) < \varepsilon \}$$

$$\forall t \geq \gamma(\varepsilon, A) \quad A^+ \vec{e}_j \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x}_A) \quad j = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow A^+ \vec{y}(0) \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x}_A) \text{ при } t \geq \gamma(\varepsilon, A)$$

$$0 < \varepsilon < \sqrt{2}$$

Следствия

$\square$ A устойчивая м-ца. Тогда $\exists \gamma_0(A) > 0$:

$$\forall \vec{y}(0) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}, \quad t \geq \gamma_0(A): A^+ \vec{y}(0) > 0$$

$\triangle$ A устойчива $\Rightarrow A$ -неразрешимая $\xRightarrow{4.2 \text{ л. 1}} \vec{x}_A > 0$

зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$: $\forall \vec{x} \in \Gamma_{\varepsilon_0}(\vec{x}_A) \quad \vec{x} > 0$

Положим $\gamma_0(A) = \gamma(\varepsilon_0, A)$ где $\gamma(\varepsilon, A)$ из л. 1.

По л. 1 при $t \geq \gamma_0(A)$:

$$A^+ \vec{y}(0) \in \Gamma_{\varepsilon_0}(\vec{x}_A) \Rightarrow A^+ \vec{y}(0) > 0$$

Лемма 2.

$\square$ A устойчивая м-ца, $\vec{c} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, $\vec{x}_0 > 0$, $\{ \vec{x}(t) \mid t \in [0, T] \}$ реш. $3 \Delta \Pi(1)$. Тогда $\vec{c}^T \vec{x}(T) > 0$.

$$\tilde{x}(t) = \beta \cdot \lambda(A) \cdot \tilde{x}_A \quad t = \overline{1, T}$$

$$\beta > 0, \quad A \cdot \tilde{x}_A = \lambda(A) \tilde{x}_A, \quad \tilde{x}_A > 0 \quad T. 4 \text{ uz } 2A. 1$$

$$\tilde{x}(t) > 0 \text{ при } t = \overline{1, T} \\ A \tilde{x}(t+1) = \beta \cdot \lambda(A)^{t-1} A \tilde{x}_A = \beta \lambda(A)^{t-1} \lambda(A) \tilde{x}_A = \tilde{x}(t) \quad t = \overline{1, T}$$

$$A \cdot \tilde{x}(1) \leq \tilde{x}_0 \\ A \tilde{x}(1) = \beta \lambda(A)^1 A \tilde{x}_A = \beta \tilde{x}_A \leq \tilde{x}_0 \quad \beta = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{[\tilde{x}_0]_j}{[\tilde{x}_A]_j} > 0$$

$$\vec{c} \cdot \tilde{x}(T) = \beta \cdot \lambda(A)^{T-1} \vec{c} \cdot \tilde{x}_A > 0$$

$$\vec{c} \tilde{x}(T) \geq \vec{c} \tilde{x}(T) > 0$$

ΔT -a Δtop .

$$L(\{\tilde{x}(t) | t = \overline{1, T}\}, \{\vec{p}(t) | t = \overline{0, T-1}\}) = \vec{c} \tilde{x}(T) + \sum_{t=1}^{T-1} (\vec{p}(t), \tilde{x}(t) - A \tilde{x}(t+1)) + (\vec{p}(0), \tilde{x}_0 - A \tilde{x}(1)) =$$

$$= \vec{p}(0) \tilde{x}_0 + \sum_{t=1}^{T-1} (\tilde{x}(t), \vec{p}(t) - A^* \vec{p}(t-1)) + (\tilde{x}(T), \vec{c} - A^* \vec{p}(T-1))$$

об. значения:

$$\vec{p}(0) \tilde{x}_0 \rightarrow \min$$

$$A^* \vec{p}(t-1) \geq \vec{p}(t) \quad t = \overline{1, T-1}$$

$$\vec{p}(T) \geq \vec{c} \quad (2)$$

$$\vec{p}(t) \geq 0 \quad t = \overline{0, T-1}$$

$$(\vec{p}(t), \tilde{x}(t) - A \tilde{x}(t+1)) = 0 \quad (3)$$

$$(\vec{p}(0), \tilde{x}_0 - A \tilde{x}(1)) = 0 \quad (4)$$

$$(\tilde{x}(t), \vec{p}(t) - A^* \vec{p}(t-1)) = 0 \quad (4)$$

$$(\tilde{x}(T), \vec{c} - A^* \vec{p}(T-1)) = 0 \quad t = \overline{1, T-1}$$

ΔT -a Δtop .

$$A^0 \tilde{x}(T) \leq \tilde{x}(T-0)$$

$$A \tilde{x}(T) \leq \tilde{x}(T-1)$$

$$A^0 \tilde{x}(T) \leq \tilde{x}(T-0)$$

$$\theta = \overline{1, T-1}$$

также индукции

$$A^{t+1} \vec{x}(t) \leq A \vec{x}(t-\theta) \leq \vec{x}(t-\theta-1)$$

$$t = T - \theta - 1$$

По л.д. $x(t) \neq 0$ (т.к. $\vec{x}(t) > 0$), $\vec{x}(t) \geq 0$

$\exists \tau_0(A) > 0$ (см. л.1) : при $\theta \geq \tau_0(A)$: $A^\theta \vec{x}(t) > 0$

Если $t = 1, T - \tau_0(A)$, то $\vec{x}(t) > 0$

В силу усл-я гон-й мем-и (4) и леммы (2)

получим, что:

$$\vec{p}(t) = A^* \vec{p}(t-1)$$

$$t = 1, T - \tau_0(A)$$

$$\Rightarrow \vec{p}(t) = (A^*)^t \vec{p}(0)$$

$$t = 1, T - \tau_0(A)_{1,2}$$

По т-е двойств: $\vec{p}(0) \vec{x}_0 = \vec{c} \vec{x}(T) > 0$

$$\Rightarrow \vec{p}(0) \neq 0, \vec{p}(0) > 0$$

A^* — устойчивая м-ца

В силу сл-я к л.1 $\exists \tau_0(A^*) > 0$: при $\tau_0(A^*) \leq t \leq T - \tau_0(A)$: $\vec{p}(t) = (A^*)^t \vec{p}(0) > 0$

2. В силу усл-я гон-й мем-и (3) и (1)

получим, что

$$\vec{x}(t) = A \vec{x}(t+1)$$

$$t = \tau_0(A^*), T - \tau_0(A)$$

$$\vec{x}(t) = A^{T - \tau_0(A) - t} \vec{x}(T - \tau_0(A))$$

$$\vec{x}(T - \tau_0(A)) > 0$$

3. По л.1 если $T - \tau_0(A) - t \geq \tau(\varepsilon, A)$ и $\tau_0(A^*) \leq t \leq T - \tau_0(A)$

$$p(x(t), \vec{x}_A) < \varepsilon$$

$$\tau_1(\varepsilon, A) = \tau_0(A^*), \tau_2(\varepsilon, A) = \tau_0(A) + \tau(\varepsilon, A)$$

если $\tau_1(\varepsilon, A) \leq t \leq T - \tau_2(\varepsilon, A)$, то

$$p(\vec{x}(t), \vec{x}_A) < \varepsilon$$

§ 7. Модель Кожа - Россия - Рудинштейна

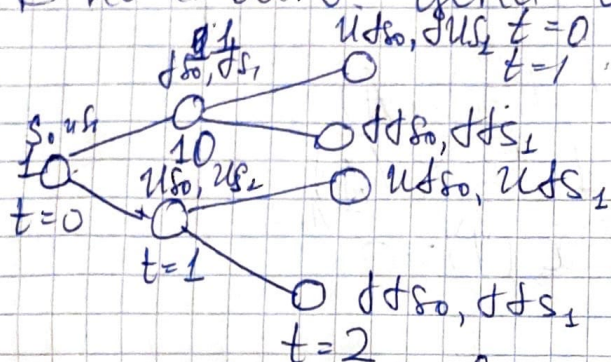
$$t = 0, \pi$$

$$(1+p)$$

822

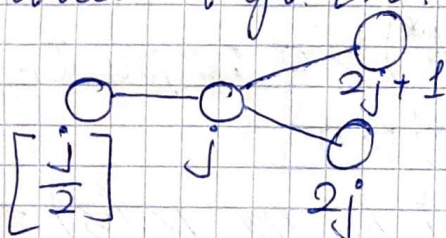
$$1 + \frac{1}{n} < 1 + p < 4$$

В нач. м. в. цена акции, облигации, опр-на



неопр-4 ($\frac{1}{2} S_1$) неопр-6 ($\frac{1}{2} S_2$)
 $\frac{1}{2}$ - прип. ψ
 0 - прип. δ

Записываем в дв. с.с.



$$r(j) = \lceil \log_2 j \rceil$$

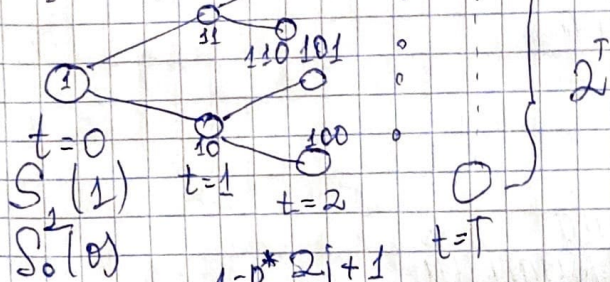
крп-во: $2^{T+1} - 1$
б-н: $2^{T+1} - 1$
терминальные
составляющие

Лекция 12.

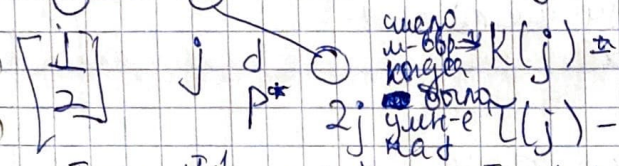
S_0 - цена опциона

$t = 0, T$

S_1 - цена акции



$$\tau(j) = \lfloor \log_2 j \rfloor$$



число периодов, в к-е цена акции увеличилась

$$S^T(1), S^{T-1}(1), \dots, S^1(1)$$

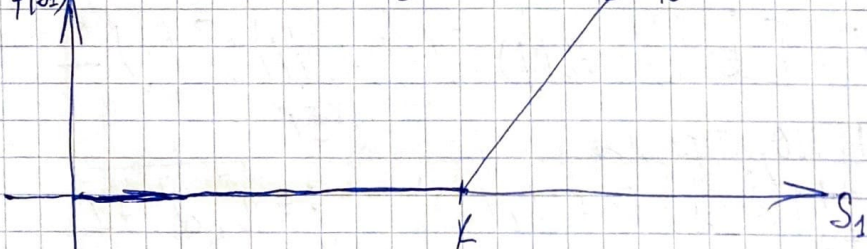
$f(S_1)$ - платежная функция.

Пример 1.

опцион "call" (на покупку)

если цена $\leq K$, то не устр-т, если $> K$, то не устр-т

$$f(S_1) = (S_1 - K)_+ = \begin{cases} S_1 - K & S_1 \geq K \\ 0 & S_1 < K \end{cases}$$

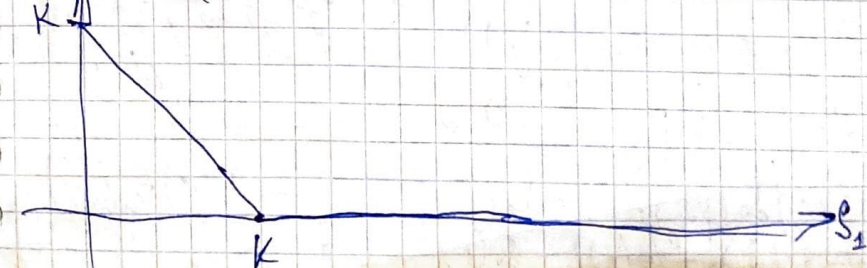


Пример 2.

опцион "put" (на продажу)

цена не меньше K

$$f(S_1) = \begin{cases} K - S_1 & S_1 \leq K \\ 0 & S_1 > K \end{cases}$$



P.S.

сделайте

$$f(s_1) = |s_1 - K| = (s_1 - K)_+ + (K - s_1)_+$$

$$\frac{S_0(2j)}{S_0(j)} = \frac{S_0(2j+1)}{S_0(j)} = 1+p$$

цена

$$\frac{S_0(2j)}{S_0(j)} \leq \frac{S_0(2j+1)}{S_0(j)} = u$$

цена
оплиаций

$$1 < 1+p < u$$

либо акция лучше опл-и
либо наоборот

$$j = \overline{2^T, 2^{T+1}-1}$$

— терминальное с-я

$$j = \overline{1, 2^T-1}$$

— промежуточное с-я

$\xi_0(j)$ — кол-во оплиаций в фин. портфеле в с-и j

$\xi_1(j)$ — кол-во акций в фин. портфеле в с-и j

$S_0(j)\xi_0(j) + S_1(j)\xi_1(j)$ — стоимость портфеля в с-и j

$S_0(j)\xi_0(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + S_1(j)\xi_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) = S_0(j)\xi_0(j) + S_1(j)\xi_1(j)$ —
условие самофин-а портфеля $j = \overline{2, 2^T-1}$

$$S_0(j)\xi_0(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + S_1(j)\xi_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) \geq f(S_1(j)) \quad j = \overline{2^T, 2^{T+1}-1}$$

$\{(\xi_0(j), \xi_1(j)) | j = \overline{1, 2^T-1}\}$ — инвестиционная стр-я

какая г.д. min $\sum$ денег, чтобы иметь такую
инв-ю стр-ю? Ст-б портфеля:

$$S_0(1)\xi_0(1) + S_1(1)\xi_1(1) \rightarrow \min$$

$$j = \overline{2, 2^T-1}$$

$$S_0(j)\xi_0(j) + S_1(j)\xi_1(j) = S_0(j)\xi_0(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + S_1(j)\xi_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) \quad \tilde{p}(j)$$

$$S_0(j)\xi_0(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) + S_1(j)\xi_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) \geq f(S_1(j)) \quad j = \overline{2^T, 2^{T+1}-1} \quad \hat{p}(j) \geq 0$$

$$L(\xi_0(j), \xi_1(j)) | j = \overline{1, 2^T-1}, \{ \tilde{p}(j) | j = \overline{2, 2^{T+1}-1} \} = S_0(1)\xi_0(1) +$$

$$+ S_1(1)\xi_1(1) + \sum_{j=2}^{2^T-1} \tilde{p}(j) \cdot [S_0(j)\xi_0(j) + S_1(j)\xi_1(j) - S_0(j)\xi_0(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) - S_1(j)\xi_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor)] + \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \hat{p}(j) (f(S_1(j)) - S_0(j)\xi_0(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) - S_1(j)\xi_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor)) =$$

$$= \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(s(j)) + \xi_0(1)(s_0(1) - \tilde{p}(2)s_0(2) - \tilde{p}(3)s_0(3)) +$$

$$+ \xi_1(1)(s_1(1) - \tilde{p}(2)s_1(2) - \tilde{p}(3)s_1(3)) + \sum_{j=2}^{2^T-1} \{ \xi_0(j)(\tilde{p}(j)s_0(j) -$$

$$- \tilde{p}(2j)s_0(2j) - \tilde{p}(2j+1)s_0(2j+1)) + \xi_1(j)(\tilde{p}(j)s_1(j) -$$

$$- \tilde{p}(2j)s_1(2j) - \tilde{p}(2j+1)s_1(2j+1)) \}$$

$$\left(\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(s(j)) \right) \rightarrow \max$$

$$\tilde{p}(2)s_0(2) + \tilde{p}(3)s_0(3) = s_0(1) \quad | : s_0(1)$$

$$\tilde{p}(2)s_1(2) + \tilde{p}(3)s_1(3) = s_1(1) \quad | : s_1(1) \Rightarrow$$

$$\tilde{p}(2j)s_0(2j) + \tilde{p}(2j+1)s_0(2j+1) = \tilde{p}(j)s_0(j) \quad | : s_0(j) \quad j = 2, 2^T-1$$

$$\tilde{p}(2j)s_1(2j) + \tilde{p}(2j+1)s_1(2j+1) = \tilde{p}(j)s_1(j) \quad | : s_1(j)$$

$$\tilde{p}(j) \geq 0 \quad j = 2^T, 2^{T+1}-1$$

$$\tilde{p}(j)(f(s(j)) - s_0(j)\xi_0\left(\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor\right) - s_1(j)\xi_1\left(\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor\right)) = 0 \quad j = 2^T, 2^{T+1}-1$$

$$\left(\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(s(j)) \right) \rightarrow \max$$

$$(1+p)\tilde{p}(2) + (1+p)\tilde{p}(3) = 1$$

$$\tilde{p}(2)d + \tilde{p}(3)u = 1$$

$$(1+p)\tilde{p}(2j) + (1+p)\tilde{p}(2j+1) = \tilde{p}(j)$$

$$d\tilde{p}(2j) + u\tilde{p}(2j+1) = \tilde{p}(j)$$

$$\tilde{p}(j) \geq 0 \quad j = 2^T, 2^{T+1}-1$$

$$\Rightarrow \tilde{p}(2) = (1+p)^{-1} \frac{u-d}{u-d-(1+p)}$$

$$\tilde{p}(3) = (1+p)^{-1} \frac{u-d}{u-d-(1+p)}$$

$$\tilde{p}(2j) = (1+p)^{-1} \frac{u-d}{u-d} \tilde{p}(j)$$

$$\tilde{p}(2j+1) = (1+p)^{-1} \frac{(1+p)-d}{u-d} \tilde{p}(j)$$

$$\tilde{p}(j) = (1+p)^{-\tau(j)} p(j)$$

$$0 < p^* = \frac{u-(1+p)}{u-d} < 1$$

$$p(2) = p^*$$

$$p(3) = (1-p^*)$$

$$p(2j) = p^* \tilde{p}(j)$$

$$p(2j+1) = (1-p^*) \tilde{p}(j)$$

$$p(j) = (p^*)^{k(j)} (1-p^*)^{r(j)-k(j)} - \text{аналит-е}$$

Предложение (Формула Кокса-Росса-Рубинштейна)
 Оптимальное значение функционала в ЗЛП(1)
 (справедливая цена дериватива с платеж. ф-и
 $f(s_1)$) равно $(1+p)^{-T} \sum_{m=0}^T C_T (p^*)^m (1-p^*)^{T-m} f(s^m, u^{T-m}, s_1^T)$
 $\sum_{\{j: r(j)=0\}} p(j) = 1$ где $p^* = \frac{u-(1+p)d}{u-d}$ - P.S. Мартингала
 вер-б

По т-е двойств-и опт-е зн-е функ-ла в ЗЛП(1):
 $(1+p)^{-T} \sum_{j=1}^J p(j) f(s(j))$
 $s(j) = \frac{s_0(j)}{(1-p^*)^{r(j)-k(j)}} s(1)$
 $k(j) = m$

в Т поз-и можно р-б m "0" $\Rightarrow C_T$

Замечание

$$y(j) = (1+p)^{-r(j)} (s_0(j) \xi_0(j) + s_1(j) \xi_1(j))$$

$$p^* y(2j) + (1-p^*) y(2j+1) = y(j)$$

$$p^* (1+p)^{-r(j)-1} (p^* (1+p) s_0(j) \xi_0(j) + p^* s_1(j) \xi_1(j) +$$

$$+ (1-p^*) (1+p) s_0(j) \xi_0(j) + (1-p^*) u s_1(j) \xi_1(j)) =$$

$$= (1+p)^{-r(j)} s_0(j) \xi_0(j) + (1+p)^{-r(j)} \frac{1}{(1+p)} (dp^* + u(1-p^*)) s_1(j) \xi_1(j)$$

$$\frac{1}{1+p} \frac{n-(1+p)}{n+d} + \frac{1}{1+p} u \frac{(1+p)-d}{u-d} = \frac{1}{(1+p)(u-d)} (dn + 2(1+p) + u(1+p) -$$

$$-u+d) = 1$$

Лекция 13.

$$(1+p)^{-T} \sum_{m=0}^T C_T (p^*)^m (1-p^*)^{T-m} f(d^m u^{T-m} S_1(1))$$

$$p^* = \frac{u - (1+p)}{u-d} = \frac{u-1-p}{u-d}$$

$$\lambda \in [d, u]$$

$$f(S_1)$$

Предположение 5^е.

Платёжная ф-я $f(S_1)$ европейского дериватива является выпуклой. Тогда минимальная сумма денег в период времени 0 необходимая, чтобы гарантированно выполнить платёжного обязательства, управляя портфелем из акций и облигаций, даётся формулой Кокса-Росса-Рубинштейна

$W(S_1, t)$ - мин сумма денег для н-я портфеля,

$t=T: W(S_1, T) = f(S_1)$ - выпукла по S_1

$W(S_1, 0) = ?$ (ф-ла К.-Р.-Р. даёт это зн-е)

$$S_1 \in [d^t S_1(1), u^t S_1(1)]$$

$$W(S_1, t-1)$$

$$[dS_1, uS_1]$$

$$\lambda \in [d, u]$$

$$\left(\begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix} \right)_{\text{акт.}, \text{обл.}}$$

$$(1+p)\varphi_0 + d\varphi_1 = W(dS_1, t)$$

$$(1+p)\varphi_0 + u\varphi_1 = W(uS_1, t)$$

$$\varphi_0 = \frac{uW(dS_1, t) - dW(uS_1, t)}{(1+p)(u-d)}$$

$$\varphi_1 = \frac{W(uS_1, t) - W(dS_1, t)}{u-d}$$

$$(1+p)\varphi_0 + \lambda\varphi_1 = \frac{uW(dS_1, t) - dW(uS_1, t)}{u-d} + \lambda \left[\frac{W(uS_1, t) - W(dS_1, t)}{u-d} \right]$$

$$= \left(\frac{u-d}{u-d} \right) W(ds_1, t) + \left(\frac{2-d}{u-d} \right) W(us_1, t) \geq W\left(\frac{u-d}{u-d}\right) ds_1 +$$

$$+ \left(\frac{2-d}{u-d} \right) us_1, t) = W(2s_1, t)$$

$$(\xi_0, \xi_1)$$

$$\xi_0 + \xi_1 \rightarrow \min$$

$$(1+p)\xi_0 + d\xi_1 \geq W(ds_1, t)$$

$$(1+p)\xi_0 + u\xi_1 \geq W(us_1, t)$$

$$W(s_1, t-1) = \xi_0 + \xi_1 = (1+p)^{-1} \left(\frac{u-d-p}{u-d} W(ds_1, t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1+p-d}{u-d} W(us_1, t) \right) = (1+p)^{-1} (p^* W(ds_1, t) + (1-p^*) W(us_1, t))$$

$$W(d^k u^{t-k} s_1) = (1+p)^{t-T} \sum_{m=0}^{T-t} C_{T-t}^m (p^*)^{t-t-m} (1-p^*)^{m+k} d^{T-m-k} u^{T-m-k}$$

$$0 \leq k \leq t$$

$$(1+p)^{-1} (p^* W(ds_1, t+1) + (1-p^*) W(us_1, t+1))$$

$$(1+p)^{-1} (p^* W(d^{k+1} u^{t-k} s_1, t+1) + (1-p^*) W(d^k u^{t-k+1} s_1, t+1))$$

§8. Модель Блэка-Шоулса.

$$[0, T]$$

$$N$$

$$0, \frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, \dots, \frac{(N-1)T}{N}, T$$

$$\left[0, \frac{T}{N}\right], \left[\frac{T}{N}, \frac{2T}{N}\right], \dots, \left[\frac{(N-1)T}{N}, T\right]$$

$$\rho = \frac{\sigma \sqrt{T}}{N} \cdot \sigma \sqrt{\frac{T}{N}}$$

$$d = \frac{e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}} - 1}{e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}} = \frac{1 + \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T}{N}\right) + O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^{3/2}\right) - 1 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T}{N}\right) + O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^{3/2}\right)}{1 + \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T}{N}\right) - 1 + \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T}{N}\right) + O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^{3/2}\right)}$$

$$= \frac{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T}{N}\right) + O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^{3/2}\right) - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T}{N}\right) + O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^{3/2}\right)}{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}} + \sigma \sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^{3/2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{T}{N}\right) + O\left(\left(\frac{T}{N}\right)^{3/2}\right)}{2} +$$

$$+ O\left(\frac{T}{N}\right)$$

Преположение 6

Э предель:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tau T}{N}\right)^{-N} \sum_{m=0}^N C_N^m (p_N^*)^m (1-p_N^*)^{N-m} f\left(e^{(N-2m)\tau\sqrt{T}/N} S_1\right)$$

$$= \frac{e^{-\tau T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{2\sqrt{T}y + \tau T - \frac{\tau^2}{2}T}\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\xi_k = \begin{cases} -1 & \text{с вер-ю } p_N^* \\ 1 & \text{с вер-ю } (1-p_N^*) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^N \xi_k$$

$$M\xi_N = N(1-2p_N^*) = \left(\frac{\tau}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{TN} + O(1)$$

$$D^2\xi_N = N(1-(1-2p_N^*)^2) = N - T\left(\frac{\tau}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

ξ_N принимает зн-е $N=2m$ с вер-ю $(p^*)^m (1-p^*)^{N-m}$

$$\frac{\xi_N - M\xi_N}{D\xi_N} = y$$

$$\xi_N = (D\xi_N)y + M\xi_N \quad \text{где}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tau T}{N}\right)^{-N} = e^{-\tau T}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N C_N^m (p_N^*)^m (1-p_N^*)^{N-m} f\left(e^{(N-2m)\tau\sqrt{T}/N} S_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{2\sqrt{T}y + \tau T - \frac{\tau^2}{2}T}\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Пример.

Движение на горизонте $f(s_1) = (s_1 - k)_+$

$$\frac{e^{-\tau T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (s_1 e^{2\sqrt{T}y + \tau T - \frac{\tau^2}{2}T} - k)_+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$\hat{y} = \frac{\ln \frac{k}{s_1} - \tau T + \frac{\tau^2}{2}T}{2\sqrt{T}}$$

$$= \frac{e^{-\tau T}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\ln \frac{k}{s_1} - \tau T + \frac{\tau^2}{2}T}^{+\infty} (s_1 e^{2\sqrt{T}y + \tau T - \frac{\tau^2}{2}T} - k) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\Theta_-(x, T) = \frac{\ln \frac{x}{K} + (\tau - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$\Theta_+(x, T) = \frac{\ln \frac{x}{K} + (\tau + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}$$

Формула Блэка-Шоулса:

$$S_1 \Phi(\Theta_+(S_1, T)) - Ke^{-rT} \Phi(\Theta_-(S_1, T))$$

Греческие параметры:

$$u(S_1, T) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{\sigma \sqrt{T} y + rT - \frac{\sigma^2 T}{2}} S_1) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\rho = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

ро

бета

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial S_1}$$

дельта

$$\Gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2}$$

гамма

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial T}$$

тета

Для опциона на продажу:

$$p = \Phi(\Theta_-(S_1, T))$$

$$\gamma = \frac{S_1 T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Theta_-(S_1, T))^2}{2}}$$

$$\Delta = \Phi(\Theta_+(S_1, T))$$

$$\Gamma = \frac{1}{S_1 \sigma \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(\Theta_+(S_1, T))^2}{2}}$$

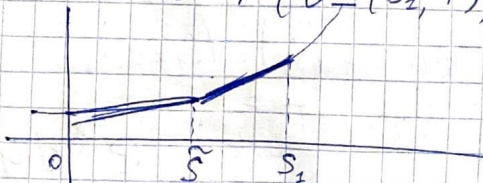
$$\Theta = \frac{\partial S_1}{\partial \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(\Theta_+(S_1, T))^2}{2}} + Ke^{-rT} \Phi(\Theta_-(S_1, T))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S_1^2} > 0$$

$$S_1 > \tilde{S} > 0$$

$$\frac{u(S_1, T) - u(\tilde{S}, T)}{S_1 - \tilde{S}} > \frac{u(\tilde{S}, T) - 0}{\tilde{S} - 0}$$

$$\frac{u(S_1, T) - u(\tilde{S}, T)}{u(\tilde{S}, T)} > \frac{S_1 - \tilde{S}}{\tilde{S}} - \text{эффект рычага}$$



Предложение 8.

Если платёжная ф-я европейского дериватива $f(s)$. Тогда цена дериватива со сроком до погашения t удовлетворяет модели Блэка-Шоулса уравнению

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial t} = r s \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} - r u(s, t)$$

$$u(s, 0) = f(s)$$

$$\Delta^2 V^T y + rT - \frac{\sigma^2}{2} T = Z$$



Лекция 14. Теория арбитража

$t = \overline{0, T}$

$1 + p$

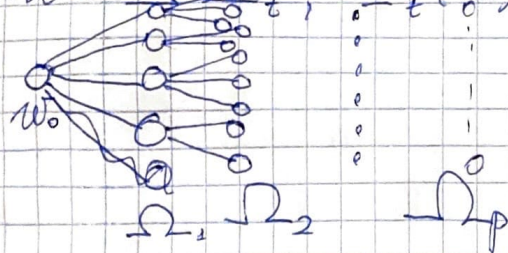
$i \in I$

$|I| < +\infty$

Ω_t $t = \overline{0, T}$ $\{\omega_0\} = \Omega_0$ $|\Omega_t| < +\infty$

$\Phi_t: \Omega_t \rightarrow \Omega_{t-1}$ $t = \overline{1, T}$

$\omega \in \Omega_t, \Phi_t(\omega) \in \Omega_{t-1}$



$\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) | i \in I, \omega \in \Omega_t, t = \overline{0, T-1}\}$ - инвестиционная стратегия

$$\xi_0(\omega) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) \xi_i(\omega) = (1+p) \xi_0(\Phi_t(\omega)) \oplus$$

$S_i(\omega)$ - цена акций i -го типа в состоянии ω финансового рынка

$$\oplus \sum_{i \in I} S_i(\omega) \xi_i(\Phi_t(\omega)) \quad \omega \in \Omega_t \quad t = \overline{1, T-1}$$

$\{p, S_i(\omega) | i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$ - описание фин. рынка

Опр. Будем говорить, что инвестиционная стратегия $\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) | i \in I, \omega \in \Omega_t, t = \overline{0, T-1}\}$

является арбитражной, если выпол-ся усл-я А:

$$\xi_0(\omega_0) + \sum_{i \in I} S_i(\omega_0) \xi_i(\omega_0) \leq 0 \quad (1)$$

$$(2) \quad \xi_0(\omega) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) \xi_i(\omega) = (1+p) \xi_0(\Phi_t(\omega)) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) \xi_i(\Phi_t(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega_t \quad t = \overline{1, T-1}$$

$$(3) \quad (1+p) \xi_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i \in I} S_i(\Phi_T(\omega)) \xi_i(\Phi_T(\omega)) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$(4) \quad \exists \hat{\omega} \in \Omega_T \quad (1+p) \xi_0(\Phi_T(\hat{\omega})) + \sum_{i \in I} S_i(\hat{\omega}) \xi_i(\Phi_T(\hat{\omega})) > 0$$

Будем говорить, что финансовый рынок

$\{p, s_i(w) | i \in I, w \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$
 безарбитражен, если на нем $\nexists$ арбитражного
 инвестиционного стратегий

Первая фундаментальная теорема фор-
мирования цен финансовых активов.

Для того, чтобы фин-й рынок был
 безарбитражен необход-о и дост-о, чтобы
 $\exists \{p(w) > 0 | w \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$ такие, что:

$$\begin{aligned} (b) \sum_{\{w | \Phi_t(w) = \varphi\}} p(w) &= p(\varphi) \quad \forall \varphi \in \Omega_{t-1} \quad t = \overline{1, T} \\ (b) S_i(\varphi) &= \sum_{\{w | \Phi_t(w) = \varphi\}} \frac{S_i(w) p(w)}{(1+p) p(\varphi)} \quad \forall \varphi \in \Omega_{t-1} \quad t = \overline{1, T} \\ &\quad \forall i \in I \\ p(w_0) &= 1 \end{aligned}$$

Замечание.

$$\sum_{w \in \Omega_t} p(w) = 1 \quad t = \overline{0, T}$$

Приведем цены фин-х инструментов в нот-и²
 м. б.

$$\tilde{S}_i(w) = \frac{(1+p)^{-t} S_i(w)}{\sum_{\{w | \Phi_t(w) = \varphi\}} \frac{S_i(w) p(w)}{p(\varphi)}} \quad w \in \Omega_t \quad t = \overline{0, T}$$

$\{p(w) | w \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$ - мартигальное распр-е вер-и²

$$\sum_{w \in \Omega_T} \{(1+p) \xi_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_T(w))\} \rightarrow \max \quad (7) \quad \begin{matrix} \text{ст-б портф} \\ \text{во всех тех} \\ \text{сост-х} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \xi_0(w_0) + \sum_{i \in I} S_i(w_0) \xi_i(w_0) &\leq 0 \quad (1) \quad \{ \tilde{p}(w) \geq 0 \\ \xi_0(w) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(w) &= (1+p) \xi_0(\Phi_t(w)) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_{i1}(\Phi_t(w)) \\ (1+p) \xi_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_{iT}(\Phi_T(w)) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\{\xi_0(w), \xi_i(w) | i \in I, w \in \Omega_t, t = 0, T-1\}, \\
& \{\tilde{p}(w) | w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}) = \sum_{w \in \Omega_0} \{ (1+p) \xi_0(\Phi_T(w)) + \\
& + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_T(w)) \} + \tilde{p}(w) \xi_0(w_0) + \\
& + \sum_{i \in I} S_i(w_0) \xi_i(w_0) + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{w \in \Omega_t} \tilde{p}(w) \{ (1+p) \xi_0(\Phi_t(w)) \\
& + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_t(w)) - \xi_0(w) - \sum_{i \in I} S_i(w) \cdot \\
& \cdot \xi_i(w) \} + \sum_{w \in \Omega_T} \tilde{p}(w) \{ (1+p) \xi_0(\Phi_T(w)) + \\
& + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_T(w)) \} = \xi_0(w) \{ (1+p) \cdot \\
& \cdot \sum_{w \in \Omega_1} \tilde{p}(w) - \tilde{p}(w_0) \} + \sum_{i \in I} \xi_i(w_0) \{ \sum_{w \in \Omega_1} \tilde{p}(w) S_i(w) - \\
& - S_i(w_0) \tilde{p}(w_0) \} + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{w \in \Omega_{t+1}} \{ \xi_0(w) (-\tilde{p}(w)) + \\
& + \sum_{\{w | \Phi_t(w) = v\}} (1+p) \tilde{p}(w) \} + \sum_{i \in I} \xi_i(v) (-\tilde{p}(v) S_i(v) + \\
& + \sum_{\{w | \Phi_t(w) = v\}} \tilde{p}(w) \cdot S_i(w) \} + \sum_{v \in \Omega_{T-1}} \{ \xi_0(v) (-\tilde{p}(v)) + \sum_{\{w | \Phi_T(w) = v\}} (1+p) \cdot \\
& \cdot (1 + \tilde{p}(w)) + \sum_{i \in I} \xi_i(v) \cdot (-\tilde{p}(v) S_i(v) + \\
& + \sum_{\{w | \Phi_T(w) = v\}} (1 + \tilde{p}(w)) \cdot S_i(w) \}
\end{aligned}$$

$$(1+p) \sum_{w \in \Omega} \tilde{p}(w) = \tilde{p}(w_0)$$

$$\tilde{p}(w_0) S_i(w_0) = \sum_{w \in \Omega} S_i(w) \tilde{p}(w) \quad i \in I$$

$$\sum_{\{w | \Phi_t(w) = v\}} \tilde{p}(w) = \tilde{p}(v) \quad \forall v \in \Omega_{t-1} \quad t = 2, T-1$$